ทฤษฎีของเบอร์นูลีย์

เรียบเรียงโดย ดร. กนต์ธร ชำนิประศาสน์

กล่าวนำ

สมการของเบอร์นูลีย์ถือได้ว่าเป็นสมการพื้นฐานทางกลศาสตร์ของไหลที่สำคัญที่สุดสมการหนึ่ง สมการนี้เป็นสมการที่ว่าด้วยการอนุรักษ์พลังงานสำหรับการไหลของของไหลอุดมคตินั่นคือการไหลของของไหลที่ไม่มีความหนืด และเป็นการไหลคงตัวแบบไม่อัดตัวและไม่มีการสูญเสียใดๆเกิดขึ้น ข้อควรจำในการใช้สมการเบอร์นูลีย์พื้นฐานคืออย่าลืมว่า*สมการจะใช้ได้กับกรณีการไหลคงตัวแบบไม่อัดตัวและไม่มีการสูญเสียพลังงานเกิดขึ้นเท่านั้น* สำหรับจุดประสงค์ของการทดลองนี้คือการศึกษาการอนุรักษ์พลังงานตามทฤษฎีของเบอร์นูลีย์และเปรียบเทียบกับการไหลที่เกิดขึ้นจริงในท่อที่มีการเปลี่ยนแปลงขนาด ตลอดจนการหาค่าต่างๆที่เกี่ยวข้องกับการไหลในท่อที่มีการเปลี่ยนแปลงขนาดพื้นที่หน้าตัด

ทฤษฎีของเบอร์นูลีย์

สำหรับการไหลของของไหลนั้นหากว่าพิจารณาว่าไม่มีการสูญเสียพลังงานในรูปแบบต่างๆ เช่นการสูญเสียเนื่องจากแรงเสียดทานหรือการถ่ายโอนความร้อน ดังนั้นตามกฎข้อที่หนึ่งของเทอร์โมไดนามิกส์จะได้ว่าผลรวมของพลังงานทั้งหมดที่มีอยู่ในของไหลจะต้องคงที่ และถ้าหากว่าการไหลนั้นเป็นการไหลที่อัดตัวไม่ได้ เราสามารถที่จะเขียนสมการพลังงานให้อยู่ในรูปของสมการเบอร์นูลีย์ (Bernoulli's Equation) คือ

$$\frac{P}{\rho}+\frac{V^2}{2}+gZ=\text{Constant} \tag{1}$$

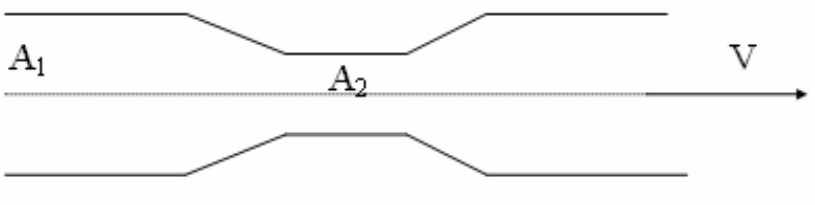
เมื่อ P คือความดัน, V คือความเร็ว, Z คือความสูงจากระดับอ้างอิงหนึ่ง และ ρ เป็นความหนาแน่นของของไหล หรือเมื่อพิจารณาที่จุดสองจุดใดๆในสนามการไหลจะได้

$$\frac{P_1}{\rho}+\frac{V_1^2}{2}+gZ_1=\frac{P_2}{\rho}+\frac{V_2^2}{2}+gZ_2 \tag{2}$$

หรืออาจใช้ค่า g หารตลอดทั้งสมการจะได้

$$\frac{P_1}{\rho g}+\frac{V_1^2}{2g}+Z_1=\frac{P_2}{\rho g}+\frac{V_2^2}{2g}+Z_2 \tag{3}$$

จาก (3) จะพบว่าหน่วยของแต่ละพจน์จะเป็นหน่วยของความสูง (m) และสามารถเรียกได้อีกอย่างหนึ่งว่า Head ซึ่งมีความหมายทางฟิสิกส์ว่าเป็นพลังงานต่อหน่วยน้ำหนักของของไหลและเมื่อพิจารณาที่ละพจน์ก็จะมีชื่อเรียกต่างๆกันออกไปคือ สำหรับพจน์แรกเป็นพจน์ที่ประกอบด้วยความดันสถิตย์เป็นหลักจึงเรียกว่า Pressure Head หรือ Static Head ส่วนพจน์ที่สองเป็นพจน์ที่มีความเร็วอยู่จะเรียก Velocity Head หรือ Dynamics Head และพจน์สุดท้ายจะเรียก Elevation Head และเมื่อรวมทั้งหมดเข้าด้วยกันจะเรียก Total Head



รูปที่ 1 ท่อเบอร์นูลีย์

เมื่อพิจารณาการไหลในท่อปิดที่มีการเปลี่ยนแปลงขนาดหน้าตัดที่วางอยู่ในแนวระดับตามรูปที่ 1 จะได้ $Z_1 = Z_2$ ดังนั้นตามสมการที่ (3) จะได้ว่าผลรวมของ pressure head และ velocity head จะคงที่อยู่เสมอ อย่างไรก็ตามการไหลผ่านท่อที่มีการเปลี่ยนแปลงขนาดอย่างเช่นท่อตามรูปที่ 1 หากพิจารณาการไหลที่ไม่มีการอัดตัวและเป็นการไหลอย่างคงตัวจะมีสมการความต่อเนื่องเป็น

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = Const. \tag{4a}$$

หรือสำหรับการไหลที่ไม่อัดตัว $A_1V_1 = A_2V_2$ (4b)

จากสมการความต่อเนื่อง (4b) จะเห็นว่าความเร็วของการไหลจะต้องมีการเปลี่ยนแปลงไปตามขนาดของหน้าตัด โดยที่จุดที่มีพื้นที่หน้าตัดเล็กของไหลจะมีความเร็วสูงกว่าจุดที่มีพื้นที่หน้าตัดใหญ่กว่า ซึ่งจากเหตุผลนี้เมื่อนำไปใช้กับสมการของเบอร์นูลลีย์ก็จะได้หลักการว่า *"สำหรับการไหลคงตัวที่อัดตัวไม่ได้ความดันที่จุดที่มีพื้นที่เล็กจะต่ำกว่าความดันที่จุดที่มีหน้าตัดมากกว่า"*

ถ้าหากว่ามีการวัดความดันที่ตำแหน่งต่างๆใช้ manometer จะพบว่าค่าความดันที่ตำแหน่งต่างๆจะเปลี่ยนไปตามความสูงของของไหลที่ใช้ใน manometer และจะได้ตามความสัมพันธ์ระหว่างความดันและความสูงเป็น $P = \rho gh$, เมื่อ h คือความสูงของของไหลใน manometer ซึ่งเมื่อแทนลงในสมการเบอร์นูลีย์จะได้เป็น

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2g} = h_2 + \frac{V_2^2}{2g} \tag{5}$$

สำหรับท่อที่มีการเปลี่ยนแปลงพื้นที่หน้าตัดอย่างต่อเนื่อง นิยมที่จะกำหนดตำแหน่งใดตำแหน่งหนึ่งเป็นตำแหน่งอ้างอิงเพื่อใช้เปรียบเทียบการเปลี่ยนแปลงพลังงาน สำหรับการไหลในท่อเบอร์นูลีย์นั้นนิยมที่จะใช้ตำแหน่งที่มีพื้นที่หน้าตัดเล็กที่สุดเป็นตำแหน่งอ้างอิง ดังในในสมการที่ (5) ในเอกสารชุดนี้จะขอกำหนดให้ตำแหน่งที่ 2 เป็นตำแหน่งที่ท่อมีพื้นที่หน้าตัดน้อยที่สุด หรือที่เรียกว่า "throat" ของท่อ ส่วนตำแหน่งที่ 1 หมายถึงตำแหน่งที่มีพื้นที่หน้าตัดใหญ่ที่สุดหรือตำแหน่งที่ทางเข้าท่อ จากสมการความต่อเนื่อง (4b) สมการที่ (5) สามารถเขียนได้เป็น

$$h_1 + \frac{V_2^2}{2g}\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 = h_2 + \frac{V_2^2}{2g} \tag{6}$$

หรือสามารถหาความเร็วที่ตำแหน่ง 2 ได้เป็น

$$V_2 = \sqrt{\frac{2g(h_1 - h_2)}{1-(A_2 / A_1)^2}} \tag{7}$$

สำหรับอัตราการไหล Q = AV เมื่อพิจารณาที่ตำแหน่ง 2 ได้เท่ากับ

$$Q = A_2\sqrt{\frac{2g(h_1 - h_2)}{1-(A_2 / A_1)^2}} \tag{8}$$

โดยอัตราการไหลที่ได้นี้จะเป็นอัตราการไหลที่ได้ตามทฤษฎีของเบอร์นูลีย์ เมื่อการไหลเป็นไปอย่างอุดมคติคือไม่มีแรงเสียดทาน แต่ในทางปฏิบัติแล้วนั้นจะต้องเกิดมีการสูญเสียขึ้นซึ่งจะทำให้อัตราการไหลจริงนั้นต่ำกว่าที่เป็นไปตามทฤษฎี ดังนั้นจึงเป็นที่นิยมเขียนสมการ (8) ในรูป

$$Q = CA_2\sqrt{\frac{2g(h_1 - h_2)}{1-(A_2 / A_1)^2}} \tag{9}$$

โดย C คือ สัมประสิทธิ์ของการไหล (discharge coefficient) หรือสัมประสิทธิ์ของท่อเวนจูรีนี้ โดยปกติสำหรับท่อที่สร้างขึ้นอย่างดีจะมีค่าอยู่ประมาณ 0.92-0.99 และสามารถหาได้จากการทดลอง โดยค่านี้อาจจะเปลี่ยนแปลงไปบ้างตามอัตราการไหล และให้สังเกตว่าค่าสัมประสิทธินี้จะพิจารณาที่ตำแหน่งกว้างที่สุดและแคบที่สุดของท่อเท่านั้น

สำหรับค่า head loss ของการไหลภายในท่อทั้งหมดนั้นอย่างที่ได้กล่าวมาแล้วว่าจะเป็นฟังก์ชั่นของการไหลโดยค่า Total Head Loss, $h_{loss,total}$ นิยามว่าเป็นค่า total head ที่ทางเข้าลบด้วยค่า total head ที่ทางออกหรือ

$$h_{loss,total} = h_{total,in} - h_{total,out} \tag{10}$$

ในกรณีที่การไหลคงตัวและพื้นที่หน้าตัดที่ทางเข้าและทางออกจากท่อมีขนาดเท่ากัน จะได้ว่า

$$h_{loss,total} = \left.\frac{P}{\rho g}\right|_{in} - \left.\frac{P}{\rho g}\right|_{out} \tag{11}$$

จากสมการที่ (11) จะเห็นว่าค่า total head loss จะเป็นผลต่างของ pressure head ที่ทางเข้าและทางออกในกรณีที่หน้าตัดขาเข้าและขาออกเท่ากัน อย่างไรก็ตามเมื่ออัตราการไหลเปลี่ยนไปค่า pressure head จะเปลี่ยนไปซึ่งยังผลให้ค่า total head loss นี้เปลี่ยนแปลงตามไปด้วย

ค่าอีกค่าหนึ่งที่สำคัญของท่อเบอร์นูลีย์ก็คือการกระจายของ piezometric head ตลอดทั้งท่อ ตามทฤษฎีของเบอร์นูลีย์แล้วที่ตำแหน่งที่มีความเร็วเท่ากัน หรือมีพื้นที่หน้าตัดเท่ากัน pressure head ควรจะเท่ากัน แต่ในความเป็นจริงแล้วการไหลที่เกิดขึ้นมีการสูญเสียพลังงานเกิดขึ้นทำให้ pressure head ที่ตำแหน่งที่มี velocity head เท่ากันแต่อยู่ที่ตำแหน่งต่างกันจะมี pressure head ไม่เท่ากัน ค่า piezometric head นี้นิยมทำให้เป็นค่าไม่มีมิติ (dimensionless) โดยหาร head นี้ด้วย velocity head ที่ throat ซึ่งจะได้ piezometric head coefficient, C_{ph}, เป็น

$$C_{ph} = \frac{h_n - h_1}{V_2^2 / 2g} \tag{12}$$

โดย ตำแหน่ง n คือตำแหน่งใดๆบนท่อ ตำแหน่งที่ 1 คือตำแหน่งก่อนที่จะเข้าสู่ท่อและ 2 เป็นตำแหน่งที่ throat ซึ่งค่านี้เป็นค่าที่ได้จากการวัดในการทดลอง สำหรับการไหลในอุดมคตินั้นค่า C_{ph} นั้นจะขึ้นอยู่กับขนาดของท่อเท่านั้นนั่นคือสามารถหาได้จาก

$$h_n - h_1 = \frac{V_1^2}{2g} - \frac{V_n^2}{2g} \tag{13}$$

หารสมการนี้ด้วย $\frac{V_2^2}{2g}$ จะได้

$$\frac{h_n - h_1}{V_2^2 / 2g} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2 - \left(\frac{V_n}{V_2}\right)^2 \tag{14}$$

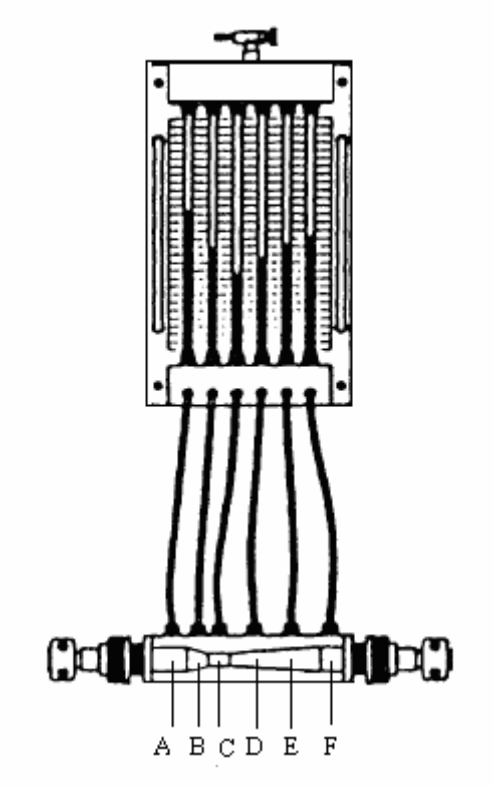
ด้านซ้ายมือของ (14) ก็คือ C_{ph} และทางด้านขวามือนั้นหากใช้สมการความต่อเนื่องจะได้ว่า $\frac{V_1}{V_2} = \frac{A_2}{A_1}$ และ $\frac{V_n}{V_2} = \frac{A_2}{A_n}$ เมื่อแทนค่าลงใน (14) จะได้

$$C_{ph} = \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 - \left(\frac{A_2}{A_n}\right)^2 = \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^4 - \left(\frac{D_2}{D_n}\right)^4 \tag{15}$$

เมื่อ D คือเส้นผ่านศูนย์กลางของท่อ

อุปกรณ์ทดสอบ

อุปกรณ์ที่ใช้ทดสอบเป็นท่อ venturi มีลักษณะและขนาดตามรูปที่ 2 โดยจะมีตำแหน่งเจาะวัดความดันอยู่ 6 ตำแหน่งคือตำแหน่ง A, B, C, D, E และ F โดยตำแหน่ง A เป็นตำแหน่งที่ทางเข้าและตำแหน่ง F เป็นตำแหน่งทางออกซึ่งตำแหน่งทั้งสองเป็นตำแหน่งที่มีพื้นที่หน้าตัดเท่ากัน ส่วนตำแหน่งคอคอดจะเป็นตำแหน่ง C



รูปที่ 2 อุปกรณ์การทดสอบ

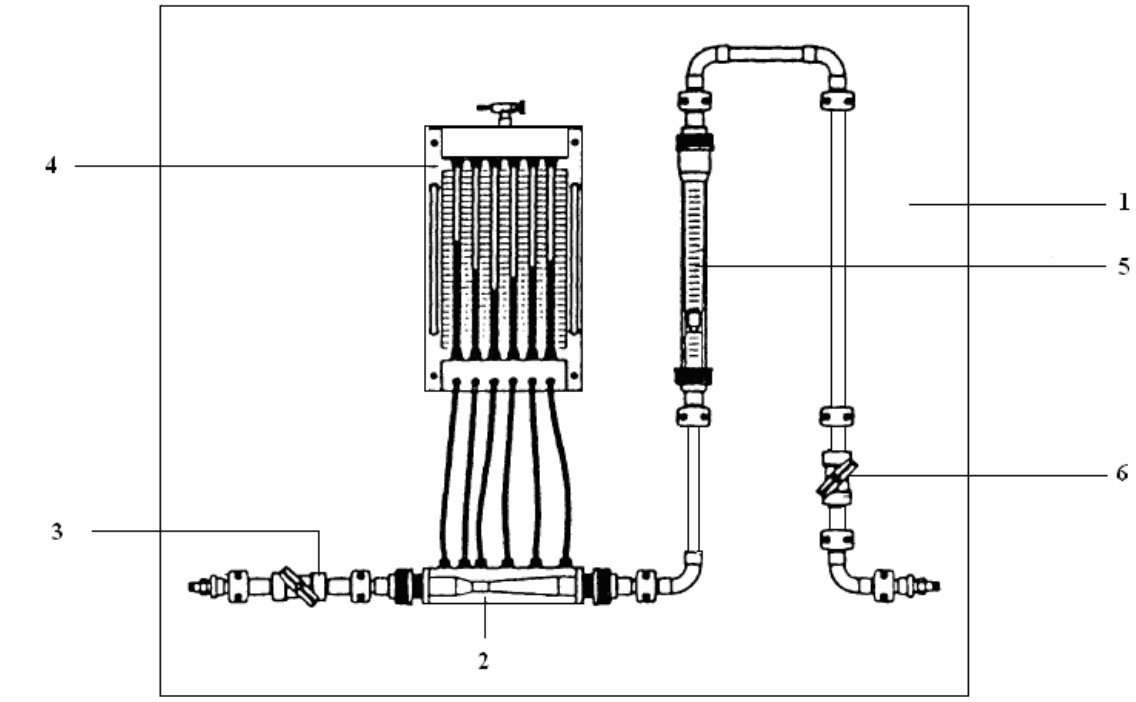
สำหรับขนาดของท่อที่ตำแหน่งต่างๆ ได้แสดงไว้ในตารางที่ 1

ตารางที่ 1 ขนาดของท่อที่ตำแหน่งต่างๆ

ตำแหน่ง	เส้นผ่านศูนย์กลาง (mm)
A	28.4
B	22.5
C	14.0
D	17.2
E	24.2
F	28.4

เครื่องมือทดลอง

เครื่องมือทดลองเป็นเครื่องมือการทดลองของบริษัท GUNT Hamburg, Germany รุ่น HM130 Bernoulli's Theorem Demonstration Apparatus โดยมีส่วนประกอบตามรูปที่ 3



รูปที่ 3 เครื่องมือทดลอง

Details

1. Demonstration panel
2. Bernoulli tube
3. Intake valve
4. 6-way pressure level
5. Variable-area flow meter
6. Discharge valve

การทดลอง

การทดลองนี้จะเป็นหาค่า discharge coefficient ของท่อที่อัตราการไหลต่างๆ, total head loss ที่อัตราการไหลต่างๆของท่อ, การหาค่า piezometric head coefficient ของท่อและแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง velocity head และ pressure head ภายในท่อ

ขั้นตอนการทดลอง

1. เปิดเครื่องสูบน้ำ ปรับลิ้นควบคุมการไหลให้อัตราการไหลตามที่อ่านจาก Rotameter เป็น 60 L/min
2. วัดค่า h ที่ตำแหน่งต่างๆ
3. ทำการทดลองซ้ำโดยปรับลิ้นควบคุมการไหลให้อัตราการไหลลดลงครั้งละ 10 L/min ตามลำดับ
4. เมื่อทำการทดลองครบทุกอัตราการไหล ปิดเครื่อง เสร็จสิ้นการทดลอง

การประเมินผล

1. เขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ของ Pressure head และ Velocity head กับตำแหน่งบนท่อ ที่อัตราการไหล ต่างๆ
2. เขียนกราฟความสัมพันธ์ระหว่าง total head loss กับอัตราการไหลที่เปลี่ยนไป
3. เขียนกราฟแสดงค่า C เปรียบเทียบกับค่าอัตราการไหลที่เปลี่ยนไป และหาค่า C โดยเฉลี่ยของเครื่องมือทดสอบ